

Вступительная работа, 8 класс

Во всех задачах требуется полное решение!

1. В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга, 11 — по 4 друга, а 10 — по 5 друзей в этом классе?
2. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 + 2x + a = 0$ имеет два корня одного знака?
3. В треугольнике ABC из вершины C проведены биссектрисы внутреннего и внешнего углов. Первая биссектриса образует со стороной AB угол, равный 40° . Какой угол образует с продолжением стороны AB вторая биссектриса?
4. Каждая из сторон выпуклого шестиугольника имеет длину больше 1. Всегда ли в нем найдется диагональ длины больше 2?
5. Олег поспорил с Гошей на подзатыльник, что он сможет отгадать любое задуманное им число от 1 до 1000 не более чем за 10 вопросов вида: «Это число больше/меньше такого-то?», причем Гоша хочет отвечать на них только «да» или «нет». Кто выиграет спор?
6. Найдите наибольший общий делитель всех девятизначных чисел, состоящих из разных цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 во всех возможных порядках. (то есть НОД чисел 123456789, 154723986, 543786921 и т. д.)
7. У правильного 5000-угольника покрашено 2001 вершина. Докажите, что найдутся три покрашенные вершины, лежащие в вершинах равнобедренного треугольника.